

Սեղմ նմուշառություն: II

Արմենակ Պետրոսյան

«Մաթեմատիկա և Կիրառություններ» 4-րդ ամառային դպրոց

28 Հունիսի, 2017 թ.

Ծաղկաձոր

VANDERBILT  UNIVERSITY

Բովանդակություն

Նիշեցում երեկվանից

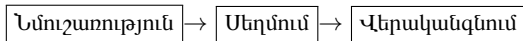
Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Նվազագույն չափումների քանակը

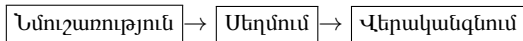
Սեղմ նմուշառության խնդիրը NP բարդ է

Եզրահանգում

Նիշեցում երեկվանից



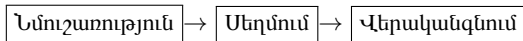
Նիշեցում երեկվանից



Նպատակ`

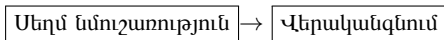
- ▶ Նվազեցնել սկզբնական չափումներ քանակը:

Նիշեցում երեկվանից



Նպատակ՝

- ▶ Նվազեցնել սկզբնական չափումներ քանակը:



Մագնիսարեզոնանսային Կոմպյուտերային Տոմոգրաֆիա



Եզրահանգում

- ▶ Վեկորների որոշ դասերի համար (օրինակ՝ թվ. պարկերներ, թվ. ձայնագրություններ) կարելի է գտնել համապատասխան բազիսներ որպեսզի նրանք ունեն գրեթե նույն վերլուծություն:

Եզրահանգում

- ▶ Վեկտորների որոշ դասերի համար (օրինակ՝ թվ. պարկերներ, թվ. ձայնագրություններ) կարելի է գտնել համապատասխան բազիսներ որպեսզի նրանք ունեն գրեթե նույն վերլուծություն:

Նարց

- ▶ Կարելի է արդյո՞ք կտրուկ քչացնել չափումների քանակը, բայց միևնույն է ստանալ գրեթե ճշգրիտ վերականգնում

Բովանդակություն

Նիշեցում երեկվանից

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Նվազագույն չափումների քանակը

Սեղմ նմուշառության խնդիրը NP բարդ է

Եզրահանգում

Գծային չափում

Սահմանում:

$\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիայի համար $\Phi(\vec{x}) = b$ թիվը կանվանենք \vec{x} վեկտորի **չափում**:

Գծային չափում

Սահմանում:

$\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիայի համար $\Phi(\vec{x}) = b$ թիվը կանվանենք \vec{x} վեկտորի **չափում**:

- ▶ Երբեմն նաև փվյալ կամ նմուշ անվանումն է օգտագործվում:

Գծային չափում

Սահմանում:

$\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ֆունկցիայի համար $\Phi(\vec{x}) = b$ թիվը կանվանենք \vec{x} վեկտորի **չափում**:

▶ Երբեմն նաև ավյալ կամ նմուշ անվանումն է օգտագործվում:

Սահմանում:

$\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ չափումը կոչվում է **գծային**, եթե

$$\Phi(\vec{x}) = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_N \cdot x_N,$$

ցանկացած $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ -ի համար, որտեղ $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ ինչ-որ ֆիքսված թվեր են:

Օրինակ

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$:-ի միջին թվաբանականը`

$$\frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$$

գծային չափում է:

Եթե ունենք $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորի մի քանի փարբեր գծային չափումներ

$$\Phi_1(\vec{x}) = a_{1,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{1,N} \cdot x_N = b_1$$

$$\Phi_2(\vec{x}) = a_{2,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{2,N} \cdot x_N = b_2$$

\vdots

$$\Phi_M(\vec{x}) = a_{M,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{M,N} \cdot x_N = b_M$$

ապա դրանք կարող ենք գրել մաթրիցային արտադրյալի տեսքով որպես

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,N} \\ & \vdots & \\ a_{M,1} & \cdots & a_{M,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$$

կամ

$$A\vec{x} = \vec{b} :$$

r-նուսր վեկտոր

Մահմանում:

Կասենք, որ $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորը $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ օրթոնորմալ բազիսում ունի *r*-նուսր վերլուծություն, եթե

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^N \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k$$

վերլուծության մեջ ոչ զրոյական գործակիցները քանակը չի գերազանցում *r*-ը:

r-նուր վեկտոր

Սահմանում:

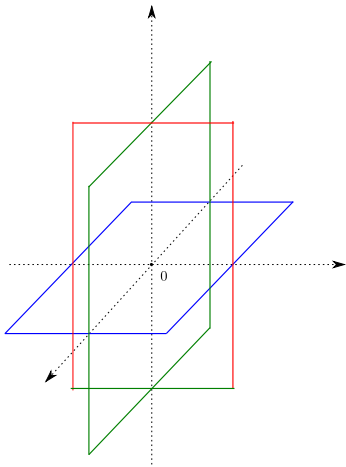
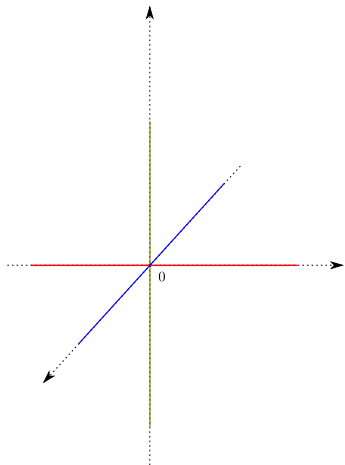
Կասենք, որ $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ վեկտորը $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ օրթոնորմալ բազիսում ունի *r*-նուր վերլուծություն, եթե

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^N \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k$$

վերլուծության մեջ ոչ զրոյական գործակիցները քանակը չի գերազանցում *r*-ը:

- ▶ \mathbb{R}^N -ում $e_k = (0, \dots, \overset{k}{1}, \dots, 0)^T$, $k = 1, \dots, N$ բազիսում *r*-նուր վեկտորների բազմությունը նշանակենք Σ_r^N -ով:

Σ_1^3 և Σ_2^3 բազմությունները



Մեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

Մեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

- ▶ Ունենք քիչ քանակությամբ չափումներ

Մեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

- ▶ Ունենք քիչ քանակությամբ չափումներ
- ▶ Գիտենք, որ վեկտորը ունի նուսր վերլուծություն փվյալ բազիսում

Վերակազնել վեկտորը:

Մեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

- ▶ Ունենք քիչ քանակությամբ չափումներ
- ▶ Գիտենք, որ վեկտորը ունի նուսր վերլուծություն փվյալ բազիսում

Վերակազնել վեկտորը:

Այլ կերպ՝ (մաթեմատիկորեն)

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

Սեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

- ▶ Ունենք քիչ քանակությամբ չափումներ
- ▶ Գիտենք, որ վեկտորը ունի նոսր վերլուծություն փվյալ բազիսում

Վերակազմել վեկտորը:

Այլ կերպ՝ (մաթեմատիկորեն)

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- ▶ A -ն $M \times N$ մատրից է ($M \ll N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- ▶ \vec{x} -ը r -նոսր է $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ բազիսում

Սեղմ նմուշառության խնդրի ձևակերպումը

- ▶ Ունենք քիչ քանակությամբ չափումներ
- ▶ Գիտենք, որ վեկտորը ունի նոսր վերլուծություն փվյալ բազիսում

Վերակազմել վեկտորը:

Այլ կերպ՝ (մաթեմատիկորեն)

Տրված է $A\vec{x} = \vec{b}$ հավասարումը, որտեղ

- ▶ A -ն $M \times N$ մատրից է ($M \ll N$), $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^M$
- ▶ \vec{x} -ը r -նոսր է $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N\}$ բազիսում

Գտնել \vec{x} -ը:

Դիպոզիտներ 1:

Դիփոդություն 1:

- ▶ Իրական կյանքում ինչպիսի բազիս էլ վերցնենք միևնույն է գործակիցների մեծ մասը լինելու են ոչ 0-ական, սակայն նրանցից շատերը կլինեն 0-ին մոտ

Դիփոդություն 1:

- ▶ Իրական կյանքում ինչպիսի բազիս էլ վերցնենք միևնույն է գործակիցների մեծ մասը լինելու են ոչ 0-ական, սակայն նրանցից շատերը կլինեն 0-ին մոտ
- ▶ Կարող ենք համարել, որ 0 են, բայց վերակազմված վեկտորը իրական վեկտորից որոշակի կերպով կտարբերվի

Դիփոդոլություն 1:

- ▶ Իրական կյանքում ինչպիսի բազիս էլ վերցնենք միևնույն է գործակիցների մեծ մասը լինելու են ոչ 0-ական, սակայն նրանցից շատերը կլինեն 0-ին մոտ
- ▶ Կարող ենք համարել, որ 0 են, բայց վերակազմված վեկտորը իրական վեկտորից որոշակի կերպով կփարբերվի
- ▶ Իդեալական դեպքում այդ փարբերությունը կլինի չնչին և աննկատելի

Դիփոդություն 2:

Դիփոդություն 2:

- ▶ Առանց ընդհանջությունը խախտելու

$$e_k = [0, \dots, \overset{k}{1}, \dots, 0]^T, \quad k = 1, \dots, N$$

Դիփրոդություն 2:

- ▶ Առանց ընդհանջությունը խախտելու

$$\mathbf{e}_k = [0, \dots, \overset{k}{1}, \dots, 0]^T, \quad k = 1, \dots, N$$

- ▶ Նակառակ դեպքում կնայենք

$$\tilde{A}\vec{z} = \vec{b},$$

որպես $\tilde{A} = A \cdot [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N]$ և $\vec{z} = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N]^T \cdot \vec{x}$

Դիպողություն 2:

- ▶ Առանց ընդհանջությունը խախտելու

$$\mathbf{e}_k = [0, \dots, \overset{k}{1}, \dots, 0]^T, \quad k = 1, \dots, N$$

- ▶ Նակառակ դեպքում կնայենք

$$\tilde{A}\vec{z} = \vec{b},$$

որպես $\tilde{A} = A \cdot [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N]$ և $\vec{z} = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N]^T \cdot \vec{x}$

$$A \quad \vec{x} \quad = \quad \vec{b}$$

The diagram shows the matrix equation $A \vec{x} = \vec{b}$. Matrix A is a 4x10 grid of colored squares. Vector \vec{x} is a 10x1 column of squares, with the 4th square from the bottom colored dark red. Vector \vec{b} is a 4x1 column of squares, with the top three colored light red, red, and blue, and the bottom one yellow.

Դիպոզիտներ 3:

Դիպոդություն 3:

- ▶ Եթե հայրնի ջիներ, որ \vec{x} -ը նոսր է, պեպք է առնվազն լինի $M = N$, հակառակ դեպքում $\vec{b} = A\vec{x}$ -ի համար $A\vec{z} = \vec{b}$ ունի անթիվ քանակությամբ լուծումներ

Դիփոդություն 4:

Դիպողություն 4:

- ▶ Եթե իմանայինք, թե \vec{x} -ի որ գործակիցներն են զրոյից փարբեր, ապա միայն $M = r$ քանակությամբ չափում անհրաժեշտ կլինի r -նոսր \vec{x} վեկտորը գտնելու համար

Դիպողություն 4:

- ▶ Եթե իմանայինք, թե \vec{x} -ի որ գործակիցներն են զրոյից փարբեր, ապա միայն $M = r$ քանակությամբ չափում անհրաժեշտ կլինի r -նոսր \vec{x} վեկտորը գրնելու համար
- ▶ Իրոք, եթե \vec{x} -ի ոչ զրոյական գործակիցները x_{i_1}, \dots, x_{i_r} -ն են, ապա

$$Ax = (A[:, i_1], \dots, A[:, i_r]) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \vec{b}$$

Դիպրոդություն 4:

- ▶ Եթե իմանայինք, թե \vec{x} -ի որ գործակիցներն են զրոյից փարբեր, ապա միայն $M = r$ քանակությամբ չափում անհրաժեշտ կլինի r -նոսր \vec{x} վեկտորը գրնելու համար
- ▶ Իրոք, եթե \vec{x} -ի ոչ զրոյական գործակիցները x_{i_1}, \dots, x_{i_r} -ն են, ապա

$$Ax = (A[:, i_1], \dots, A[:, i_r]) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \vec{b}$$

- ▶ $(A[:, i_1], \dots, A[:, i_r])$ մափրիցը քառակուսային է, և հեղևաբար կարող ենք նայել նրա հակադարձը (վերցնելով այնպես, որ հակադարձը գոյություն ունի) և այդպեղից գրնել \vec{x} -ը

Դիպրոդություն 4:

- ▶ Եթե իմանայինք, թե \vec{x} -ի որ գործակիցներն են զրոյից փարբեր, ապա միայն $M = r$ քանակությամբ չափում անհրաժեշտ կլինի r -նսոր \vec{x} վեկտորը գրնելու համար
- ▶ Իրոք, եթե \vec{x} -ի ոչ զրոյական գործակիցները x_{i_1}, \dots, x_{i_r} -ն են, ապա

$$Ax = (A[:, i_1], \dots, A[:, i_r]) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \vec{b}$$

- ▶ $(A[:, i_1], \dots, A[:, i_r])$ մափրիցը քառակուսային է, և հեփևաբար կարող ենք նայել նրա հակադարձը (վերցնելով այնպես, որ հակադարձը գոյություն ունի) և այդպեղից գրնել \vec{x} -ը
- ▶ Սակայն, սեղմ նմուշառության խնդրում \vec{x} -ի ոչ զրոյական գործակիցների ինդեքսները հայրնի չեն:

Բովանդակություն

Նիշեցում երեկվանից

Մեղմ նմուշառության խնդիրը

Նվազագույն չափումների քանակը

Մեղմ նմուշառության խնդիրը NP բարդ է

Եզրահանգում

Նայանի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$ -ը, որպեսզի \vec{x} -ը անհայտ r -նուսը վեկտոր է:

Նայանի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$ -ը, որպեսզի \vec{x} -ը անհայտ r -նուսը վեկտոր է:

- ▶ \vec{x} -ը միարժեքորեն գտնվում է \vec{b} -ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Նայանի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$ -ը, որպեսզի \vec{x} -ը անհայտ r -նուսը վեկտոր է:

▶ \vec{x} -ը միարժեքորեն գտնվում է \vec{b} -ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Թեորեմ:

Ներկայալ պայմանները համարժեք են

Նայանի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$ -ը, որպեսզի \vec{x} -ը անհայտ r -նոսր վեկտոր է:

► \vec{x} -ը միարժեքորեն գտնվում է \vec{b} -ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Թեորեմ:

Ներկայալ պայմանները համարժեք են

(1) $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է,

Նայանի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$ -ը, որպեսզի \vec{x} -ը անհայտ r -նուսը վեկտոր է:

► \vec{x} -ը միարժեքորեն գտնվում է \vec{b} -ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Թեորեմ:

Ներկայալ պայմանները համարժեք են

- (1) $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է,
- (2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,

Նայանի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$ -ը, որպեսզի \vec{x} -ը անհայտ r -նուսը վեկտոր է:

► \vec{x} -ը միարժեքորեն գտնվում է \vec{b} -ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Թեորեմ:

Ներկայից պայմանները համարժեք են

- (1) $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է,
- (2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,
- (3) A -ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:

Նայանի է միայն $\vec{b} = A\vec{x}$ -ը, որպեսզի \vec{x} -ը անհայտ r -նուսը վեկտոր է:

▶ \vec{x} -ը միարժեքորեն գտնվում է \vec{b} -ից, այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$$

ինյեկտիվ է:

Թեորեմ:

Ներկայալ պայմանները համարժեք են

- (1) $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ինյեկտիվ է,
- (2) $\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$,
- (3) A -ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:

Ներկայացում:

Եթե $A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ -ը ինյեկտիվ է, ապա $M \geq 2r$:

Ապացույց:

$$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M \text{-ն ինյեկտիվ է} \Rightarrow \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$$

Ենթադրենք $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$: Գրենք $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, որպեսզի $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \Sigma_r^N$:

Նեպակաբար

$$A\vec{x} = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = 0$$

և A -ի r -նոսր վեկտորների վրա նոսրությունից $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$, որպեսզի
 $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = 0$:

Ապացույց:

$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ -ն ինյեկտիվ է $\Rightarrow \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$

Ենթադրենք $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$: Պրենք $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, որպեսզի $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \Sigma_r^N$:
Ներկայացնենք

$$A\vec{x} = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = 0$$

և A -ի r -նուսր վեկտորների վրա նուսրությունից $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$, որպեսզից
 $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 = 0$:

$A : \Sigma_r^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ -ն ինյեկտիվ է $\Leftarrow \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\}$

Դիցուք

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \Sigma_r^N \text{ և } A\vec{x}_1 = A\vec{x}_2 :$$

Այդ դեպքում $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \Sigma_{2r}^N$ և

$$A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = 0,$$

հերկայացնենք $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$ և մեր պայամանից $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = 0$ կամ
 $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = 0$:

Ապացույց: (շրնկ)

$\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\} \Rightarrow A$ -ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:

Ենթադրենք

$$c_1 A[:, i_1] + \dots + c_{2s} A[:, i_{2r}] = 0 : \quad (1)$$

Դիցուք \vec{x} վեկտորի i_k -րդ գործակիցը հավասար է c_k -ի $k = 1, \dots, 2r$, իսկ մնացյալ գործակիցները՝ 0-ի:

$$(2) \Leftrightarrow A\vec{x} = 0 :$$

$\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$, հետևաբար $\vec{x} = 0$ ինչը նշանակում է, որ $c_1 = \dots = c_{2r} = 0$:

Ապացույց: (շրնկ)

$\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\} \Rightarrow A$ -ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:

Ենթադրենք

$$c_1 A[:, i_1] + \dots + c_{2s} A[:, i_{2r}] = 0 : \quad (1)$$

Դիցուք \vec{x} վեկտորի i_k -րդ գործակիցը հավասար է c_k -ի $k = 1, \dots, 2r$, իսկ մնացյալ գործակիցները՝ 0-ի:

$$(2) \Leftrightarrow A\vec{x} = 0 :$$

$\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$, հետևաբար $\vec{x} = 0$ ինչը նշանակում է, որ $c_1 = \dots = c_{2r} = 0$:

$\ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N = \{0\} \Leftarrow A$ -ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են:

Ենթադրենք $\vec{x} \in \ker(A) \cap \Sigma_{2r}^N$ և $x_{i_1}, \dots, x_{i_{2r}}$ -ը \vec{x} -ի ոչ-զրոյական գործակիցներն են: Նկատենք, որ

$$A\vec{x} = x_{i_1} A[:, i_1] + \dots + x_{i_{2r}} A[:, i_{2r}] \quad (2)$$

Քանի որ $\vec{x} \in \ker A$, ուստի $Ax = 0$ և սյուների գծորեն անկախությունից $x_{i_1} = \dots = x_{i_{2r}} = 0$, հետևաբար $\vec{x} = 0$:

Օրինակ որում $M = 2r$

Օրինակ որում $M = 2r$

Դիֆարկենք Վանդերմոնդի մատրիցը՝

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{2r-1} & \alpha_2^{2r-1} & \cdots & \alpha_N^{2r-1} \end{pmatrix} :$$

Օրինակ որում $M = 2r$

Դիֆարկենք Վանդերմոնդի մատրիցը՝

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{2r-1} & \alpha_2^{2r-1} & \cdots & \alpha_N^{2r-1} \end{pmatrix} :$$

► $\det(V[:, i_1], \dots, V[:, i_{2r}]) = \prod_{k < j} (a_{i_j} - a_{i_k})$

Օրինակ որում $M = 2r$

Դիտարկենք Վանդերմոնդի մատրիցը՝

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{2r-1} & \alpha_2^{2r-1} & \cdots & \alpha_N^{2r-1} \end{pmatrix} :$$

- ▶ $\det(V[:, i_1], \dots, V[:, i_{2r}]) = \prod_{k < j} (a_{i_j} - a_{i_k})$
- ▶ V -ի ցանկացած $2r$ սյուն գծորեն անկախ են, եթե $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ բոլորը իրարից տարբեր են

Բովանդակություն

Նիշեցում երեկվանից

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Նվազագույն չափումների քանակը

Սեղմ նմուշառության խնդիրը NP բարդ է

Եզրահանգում

- ▶ Անգամ եթե թեորեմի պայմանները բավարարված են և r -նոսր լուծումը միակն է, թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել \vec{x} -ը:

- ▶ Անգամ եթե թեորեմի պայմանները բավարարված են և r -նույր լուծումը միակն է, թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել \vec{x} -ը:

Պարզամիպ մոսթեցում

- ▶ Անգամ եթե թեորեմի պայմանները բավարարված են և r -նուր լուծումը միակն է, թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել \vec{x} -ը:

Պարզամիջ մոտեցում

Եթե հայրնի լիներ, թե որ գործակիցներ են ոչ զրոյական, ապա կկարողանանք գտնել \vec{x} -ը:

- ▶ Անգամ եթե թեորեմի պայմանները բավարարված են և r -նուր լուծումը միակն է, թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել \vec{x} -ը:

Պարզամիպ մոտեցում

Եթե հայրնի լիներ, թե որ գործակիցներ են ոչ զրոյական, ապա կկարողանանք գտնել \vec{x} -ը:

- ▶ Դիտարկել ինդեքսների $\{1, \dots, N\}$ բազմության յուրաքանչյուր r էլեմենտանոց $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ ենթաբազմություն

- ▶ Անգամ եթե թեորեմի պայմանները բավարարված են և r -նոսր լուծումը միակն է, թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել \vec{x} -ը:

Պարզամիջ մոտեցում

Եթե հայրնի լիներ, թե որ գործակիցներ են ոչ զրոյական, ապա կկարողանանք գտնել \vec{x} -ը:

- ▶ Դիտարկել ինդեքսների $\{1, \dots, N\}$ բազմության յուրաքանչյուր r էլեմենտանոց $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ ենթաբազմություն
- ▶ Գտնել այն միակ I -ը, որի համար

$$(A[:, i_1], \dots, A[:, i_r]) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \vec{b}$$

հավասարումը ունի լուծում

- ▶ Անգամ եթե թեորեմի պայմանները բավարարված են և r -նոսր լուծումը միակն է, թեորեմը չի ասում, թե ինչպես գտնել \vec{x} -ը:

Պարզամիս ւոյեցում

Եթե հայրնի լինեք, թե որ գործակիցներ են ոչ զրոյական, ապա կկարողանանք գտնել \vec{x} -ը:

- ▶ Դիտարկել ինդեքսների $\{1, \dots, N\}$ բազմության յուրաքանչյուր r էլեմենտանոց $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ ենթաբազմություն
- ▶ Գտնել այն միակ I -ը, որի համար

$$(A[:, i_1], \dots, A[:, i_r]) \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} = \vec{b}$$

հավասարումը ունի լուծում

- ▶ Վարագայն դեպքում պետք է լուծել $\binom{N}{r} = \frac{N!}{r!(N-r)!}$ հավասարում

- ▶ Ենթադրենք, $N = 1000$, $r = 10$ և յուրաքանչյուր հավասարումը լուծելու համար պահանջվում է 10^{-10} վայրկյան

- ▶ Ենթադրենք, $N = 1000$, $r = 10$ և յուրաքանչյուր հավասարումը լուծելու համար պահանջվում է 10^{-10} վայրկյան
- ▶ Նաջորդաբար լուծելու համար կպահանջվի

$$\begin{aligned} 10^{-10} \frac{1000!}{10!(990)!} &= 10^{-10} \frac{991}{1} \cdots \frac{1000}{10} \\ &\geq 10^{-10} \left(\frac{1000}{10} \right)^{10} = 10^{10} \text{ վայրկյան} \geq 300 \text{ փարի} \end{aligned}$$

Էլ ավելի վապ լուր

Պարզվում է, պարճառը միայն մեր մոփեցման պարզամիփ լինելու մեջ չէ, այլ այս խնդիրը NP-բարդ է

Էլ ավելի վապ լուր

Պարզվում է, պատճառը միայն մեր մոպեցման պարզամիտ լինելու մեջ չէ, այլ այս խնդիրը NP-բարդ է

- ▶ Որոշ A-երի դեպքերում կարող է բազմանդամային արագությանը ավգորիթմ գոյություն ունենալ

Պարզվում է, պատճառը միայն մեր մոպեցման պարզամիտ լինելու մեջ չէ, այլ այս խնդիրը NP-բարդ է

- ▶ Որոշ A-երի դեպքերում կարող է բազմանդամային արագությանը ավգորիթմ գոյություն ունենալ
- ▶ Սակայն ընդհանուր մաթրիցների համար բազմանդամային արագությանը ավգորիթմ գոյություն չունի

Բովանդակություն

Նիշեցում երեկվանից

Սեղմ նմուշառության խնդիրը

Նվազագույն չափումների քանակը

Սեղմ նմուշառության խնդիրը NP բարդ է

Եզրահանգում

- ▶ Սրացանք նույն վեկտորը վերականգնելու համար անհրաժեշտ է բավարար պայմաններ

- ▶ Սրացանք նույն վեկտորը վերականգնելու համար անհրաժեշտ է բավարար պայմաններ
- ▶ Այդ պայմանները ստուգելը ընդհանուր դեպքում դժվար է

- ▶ Սրացանք նույն վեկտորը վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ
- ▶ Այդ պայմանները ստուգելը ընդհանուր դեպքում դժվար է
- ▶ Անգամ այն դեպքերում, երբ այդ պայմանները բավարարված էին, հաշվողական տեսանկյունից որևէ արդյունավետ մեթոդներ չկան խնդիրը լուծելու համար:

- ▶ Սրացանք նույն վեկտորը վերականգնելու համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ
- ▶ Այդ պայմանները ստուգելը ընդհանուր դեպքում դժվար է
- ▶ Անգամ այն դեպքերում, երբ այդ պայմանները բավարարված էին, հաշվողական տեսանկյունից որևէ արդյունավետ մեթոդներ չկան խնդիրը լուծելու համար:

Վաղը կդիտարկենք մի մեթոդ, որ հնարավորություն է տալիս օպտիմալ կերպով լուծել խնդիրը, սակայն չափումների մատրիցից լրացուցիչ պայմաններ պետք է պահանջենք:

Շնորհակալություն: